

CHAPTER 8

ETUDE THEORIQUE DE L'EXPLOITATION DES ENREGISTREMENTS DE HOULE

P. Caseau
Ingénieur des Ponts et Chaussées
en service détaché à Electricité de France.

INTRODUCTION

L'étude de la houle en un point, c'est-à-dire l'exploitation d'un enregistrement de houle, consiste à obtenir, à partir de cet enregistrement, le plus de renseignements possible sur le "spectre" de la houle.

Nous excluons le cas où la donnée $f(t)$ se présente sous la forme d'un tableau chiffré ou d'un courant électrique. Ces deux représentations ont en commun la propriété que l'addition de deux fonctions et l'opération $\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt$ y sont faciles à réaliser. L'exploitation passera donc naturellement par la fonction de corrélation $\gamma(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)f(t+\tau)$ qui est très facile à obtenir.

Au contraire, si l'enregistrement se présente sous forme de courbes sur film ou sur papier, aucune de ces deux opérations n'est facile à réaliser, ce qui enlève à $\gamma(\tau)$ beaucoup de son intérêt. Pour l'exploitation des enregistrements effectués par l'enregistreur autonome de Chatou, qui consistent en des courbes sur film de 35 mm, une méthode simplifiée est actuellement utilisée [5]. Cette méthode ne donne cependant pas tous les renseignements que l'on voudrait, et elle est moins rapide d'emploi qu'il ne serait nécessaire pour permettre le dépouillement des très nombreux enregistrements effectués avec les divers appareils en service. En modifiant un peu la méthode, M. Kowalski, de l'Instytut Morski, à Gdansk, en Pologne, a pu la mécaniser et la rendre plus pratique, sans cependant augmenter le nombre des renseignements obtenus. En s'inspirant du procédé utilisé par M. Kowalski, M. Valembois a imaginé le procédé que nous étudions ici.

Ce procédé consiste à faire défiler le film devant un appareil qui compte au moyen de cellules photoélectriques, le nombre de points d'intersection de la courbe $y = f(t)$ avec les droites $y = Ct$, pour diverses valeurs de la constante. M. Larras a proposé, au lieu de compter des nombres de points d'intersection, de totaliser des intervalles horizontaux (fig. 1).

L'étude mathématique de ces procédés conduit naturellement à considérer les "distributions" associées à $f(t)$, à voir leurs relations avec le spectre, et à sélectionner celles qui sont le plus faciles à obtenir et qui donnent le plus de renseignements sur celui-ci.

Après avoir passé en revue les hypothèses mathématiques et les résultats nécessaires au calcul, nous aborderons donc l'étude de ces distributions, et nous indiquerons quelques-unes de celles que l'on peut utiliser.

ETUDE THEORIQUE DE L'EXPLOITATION DES ENREGISTREMENTS DE HOULE

NOTATIONS

$\gamma(\tau) = [\dot{f}(t) \dot{f}(t+\tau)]$ $\Gamma(n,p,\tau) = [\dot{f}^{(n)}(t) \dot{f}^{(p)}(t+\tau)]$ $\gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma\tau} dE(\sigma)$ $dE(\sigma) = \frac{1}{2} A(\sigma) d\sigma$ $m_n = \int_0^{\infty} A(\sigma) \sigma^n d\sigma$	$\sigma_{pq} = \sqrt{\frac{m_p}{m_q}} \quad p > q$ $\sigma_n = \sqrt{\frac{m_{2n}}{m_{2n-2}}}$ $\Delta_{pq} = m_{2p} m_{2q} - m_{p+q}^2$ $\epsilon_{pq}^2 = \frac{\Delta_{pq}}{m_{2p} m_{2q}}$ $N_p = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{m_{2p+2}}{m_{2p}}} = \frac{1}{\pi} \sigma_{2p+2}$
--	---

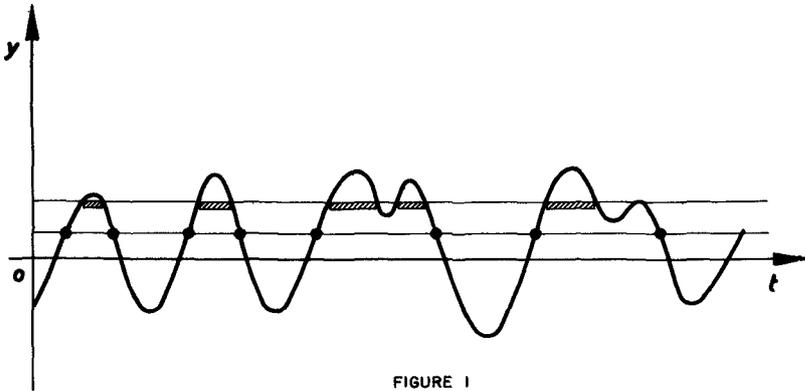


FIGURE I

PROPRIETES GENERALES DES FONCTIONS REPRESENTANT LA HOULE

Cette partie concerne les propriétés des fonctions $f(t)$ représentant la houle ou plus exactement les enregistrements de houle.

La théorie de ces fonctions a été faite (Rice [4] et Longuet-Higgins [3]) en se basant sur les propriétés des fonctions aléatoires. L'inconvénient de ce point de vue est d'une part qu'il nécessite le recours à des théorèmes ergodiques, pour que les opérations et moyennes dans l'espace des probabilités coïncident avec les opérations réellement effectuées sur $f(t)$, et que d'autre part, alors que $F'(t)$ admet une décomposition spectrale, son "épreuve" $f(t)$ n'en admet en général pas.

COASTAL ENGINEERING

Notre but au contraire a été de bâtir la théorie des opérations que nous faisons sur $f(t)$ au moyen d'hypothèses sur $f(t)$ seulement. Nous nous sommes servis pour cela de certains résultats de M. Bass sur les fonctions pseudo-aléatoires [1]. S'il est question de distribution de probabilité, c'est un raccourci de langage, car nous ne supposons pas un instant que $f(t)$ est une épreuve d'une fonction aléatoire.

On pourrait sans doute aller plus loin dans cette voie et renoncer à étudier $f(t)$, mais seulement $f(t)$ ($0 < t < T$) fonction tronquée. Les opérations faites auraient toujours un sens. Les formules algébriques resteraient aussi simples vue la précision finalement demandée aux résultats (voir dernier paragraphe). Mais ce serait, en fait, masquer le problème. Si, en effet, lorsque T varie, les résultats changent beaucoup, alors l'échantillon n'est pas représentatif. Ainsi, nos hypothèses (lorsque $T \rightarrow \infty$, telle fonction a une limite) signifient, non pas que l'infini intervient réellement, mais que la valeur effective de T a peu d'importance. On pourra appliquer cette remarque à l'étude d'une tempête représentant un état non stationnaire de la mer. (Ces notions restent évidemment à préciser, une considération intéressante serait de voir à partir de quelle valeur $\tau_0, \chi(\tau)$ est pratiquement nulle. On pourrait alors relier T à τ_0). On aurait ainsi complètement "localisé" l'étude de $f(t)$.

Nous considérerons les opérateurs suivants, définissant des moyennes :

$$M_T(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad M(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} M_T(f)$$

Et nous poserons, pour deux fonctions quelconques f et g , mais telles que l'expression ait un sens :

$$[f, g] = M(fg)$$

Soit alors une fonction $f(t)$ sur laquelle nous ferons l'hypothèse (H_1) suivante :

1. $f(t)$ est indéfiniment dérivable,
2. $D^n M(f^{(n)})$ quel que soit n ,
3. $f^{(n)}(t)$ est bornée quel que soit n .

LA FONCTION DE CORRELATION - DEFINITION.

Nous définissons $\gamma[T, \tau] = M_T(f f(t+\tau))$. On voit facilement d'après (H_1) que $\gamma(T, \tau)$ existe et est continue et dérivable indéfiniment.

Appliquant le théorème de Bochner [1], on démontre alors qu'il existe une fonction monotone $E(T, \sigma)$ à variation totale bornée et telle que

$$\gamma(T, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} dE(T, \sigma)$$

Et l'on a la formule d'inversion :

$$E(T, b) - E(T, a) = \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-U}^U \frac{e^{i\omega a} - e^{i\omega b}}{i\omega} \gamma(T, \omega) d\omega$$

pour toutes les valeurs a, b où $E(T, \sigma)$ est continue.

ETUDE THEORIQUE DE L'EXPLOITATION DES ENREGISTREMENTS DE HOULE

Nous ferons alors l'hypothèse nouvelle (H_2) ,
 $\gamma(T; \tau) \rightarrow \gamma(\tau)$ pour $T \rightarrow \infty$ et $\gamma(\tau)$ est continue pour $\tau = 0$

On sait alors (grâce à des théorèmes dus en particulier à P. Lévy [2])
 et [1] que :

1. La convergence est uniforme dans tout segment (τ, τ) , donc $\gamma(\tau)$ est continue partout.
2. $E(T, \sigma) \xrightarrow{\tau} E(\sigma)$ le sens de la "convergence complète" [2] étant :
 - $E(T, \sigma) \rightarrow E(\sigma)$ quand $T \rightarrow \infty$, quel que soit σ ,
 - $\int g dE(T, \sigma) \rightarrow \int g dE(\sigma)$ quelle que soit la fonction g continue et bornée.

PROPRIETES ALGEBRIQUES DE $\gamma(\tau)$

Nous généraliserons d'abord (H_2) en $(H'_2)^*$.

$$\Gamma(m, p, \tau) = [f^{(m)}(t), f^{(p)}(t+\tau)] \quad \text{existe et est continue en } \tau .$$

a. Nous pourrions alors démontrer les relations algébriques suivantes, par dérivation sous le \int , intégration par parties et passage à la limite.

$$\Gamma(n, p, \tau) = \Gamma(p, n, -\tau) = (-1)^n \gamma^{(n+p)}(\tau) = (-1)^p \gamma^{(n+p)}(-\tau)$$

d'où en particulier :

$$\Gamma(m, p, \tau) = (-1)^h \Gamma(m+h, p-h, \tau)$$

b. D'autre part, le même raisonnement qu'au I°, mais appliqué à f' nous montre que :

$$\gamma'' = [f, f''(t+\tau)] = -[f', f'(t+\tau)] = \int e^{i\omega\tau} dB(\omega)$$

En intégrant de 0 à τ et en utilisant le fait que $\gamma'(0) = 0$, on montre que γ' admet une représentation analogue. En intégrant à nouveau et en utilisant la formule d'inversion, on démontre que la formule :

$$\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} dE(\omega) \quad \text{est dérivable indéfiniment sous le signe } \int .$$

Ainsi $\gamma^{(n)}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} (i\omega)^n e^{i\omega\tau} dE(\omega) = (i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^n e^{i\omega\tau} dE(\omega)$

* Pour les propriétés "d'existence", il est plus simple d'étudier la fonction entre 0 et T , ce qui supprime tout problème de passage à la limite. Au contraire, on verra que les propriétés algébriques sont plus simples en faisant $T = \infty$.

COASTAL ENGINEERING

Donc :

$$\begin{aligned} \Gamma(m, p, \tau) &= (-1)^n (L)^{m+p} \int \sigma^{m+p} e^{i\omega\tau} dE(\sigma) \\ \Gamma(m, m, \tau) &= \int \sigma^{2m} e^{i\omega\tau} dE(\sigma) \\ \Gamma(m-h, m+h, \tau) &= (-1)^h \int \sigma^{2m} e^{i\omega\tau} dE(\sigma) \end{aligned}$$

En particulier, pour $\tau=0$ on trouve :

$$\Gamma(m, p, 0) = \left[f^{(m)}, f^{(m+p)} \right] = \begin{cases} 0 & \text{si } m+p \text{ est impair,} \\ (-1)^{\frac{m+p}{2}} \int \sigma^{m+p} e^{i\omega\tau} dE(\sigma) & \text{si } m+p \text{ est pair} \end{cases}$$

Ceci nous permet de calculer la matrice des covariances de n'importe quelle suite de fonction : $f^{(m)}(t), f^{(m)}(t+\tau_1), f^{(m)}(t+\tau_2) \dots f^{(m)}(t+\tau_k)$

Ces calculs sont développés en annexe.

LES DISTRIBUTIONS DE PROBABILITES.

Définition et existence - Soit $F(T, y) = \frac{1}{T} m E_T(f \leq y)$ mesure de l'ensemble des $t < T$ où $f(t) \leq y$. C'est une fonction de distribution croissante, à variation bornée par 1 et qui est familière aussi bien aux ingénieurs qu'aux mathématiciens. En hydrologie, on la nomme courbe des débits classés. Mais son utilisation la plus importante est celle de Lebesgue dans la théorie de l'intégrale.

Nous savons que si G est une fonction continue :

$$M_T \{G(f)\} = \int G(y) dF(T, y)$$

En particulier $\int y^2 dF(T, y) = M_T \{f^2\}$. (On voit que la distribution possède des moments de tous les ordres).

Notons aussi que si $f \rightarrow g$, uniformément sur $(0, T)$:

$$F(T, f \leq y) \rightarrow F(T, g \leq y)$$

d'après les propriétés de la mesure sur un segment de longueur finie.

Nous ferons alors l'hypothèse :

$$F_T \xrightarrow{c} F \quad \text{quand } T \rightarrow \infty$$

On voit donc que F définit une mesure sur des ensembles de l'axe des t liés à f et invariants par translation (c'est-à-dire invariants si on remplace $f(t)$ par $f(t+\tau)$).

On peut, en généralisant, considérer la fonction de distribution à plusieurs variables $F(T, y_0 \leq y_1, y_2 \leq y_2, \dots, y_n) = m E_T(f(t) \leq y_0, f(t+\tau_1) \leq y_1, f(t+\tau_2) \leq y_2, \dots, f(t+\tau_n) \leq y_n)$ t
Et sa limite $F(y_0, y_1, \dots, y_n)$.

ETUDE THEORIQUE DE L'EXPLOITATION DES ENREGISTREMENTS DE HOULE

Indépendance - Soient deux fonctions f et g et soient

$$F(T, y_0, y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{T} \int_0^T E_T \{ f(t) \leq y_0, \dots, f(t+\tau_n) \leq y_n \}$$

$$G(T, z_0, z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{T} \int_0^T E_T \{ g(t) \leq z_0, \dots, g(t+\tau_n) \leq z_n \}$$

$$\Psi(T, y_0, y_1, \dots, y_n, z_0, z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{T} \int_0^T E_T \{ \text{l'intersection des deux ensembles précédents} \}$$

Si, quelle que soit la suite $(\tau_1, \dots, \tau_n, u_1, \dots, u_n)$:
($\Psi - FG$), lorsque $T \rightarrow \infty$ uniformément par rapport à $(y_0, y_1, \dots, y_n, z_0, z_1, \dots, z_n)$
nous dirons que les deux fonctions sont indépendantes.

Comme sur le segment $(0, T)$ f et g sont dérivables, à dérivées continues uniformément, on peut trouver τ tel que :

$$\max \{ f'(t) - [f(t+\tau) - f(t)] \} \leq \epsilon$$

$$\max \{ g'(t) - [g(t+\tau) - g(t)] \} \leq \epsilon$$

donc, d'après la remarque du paragraphe précédent, f' et g' sont indépendantes si f et g sont indépendantes, de même pour $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$.

Exemple : il est facile de démontrer que $e^{\lambda t}$ et $e^{\lambda' t}$ sont indépendantes si (condition nécessaire et suffisante) λ et λ' sont incommensurables.

- Si f est indépendant de g et si $M(f) = 0$ et $M(g) = 0$, on a :

$$[f, g] = 0 \quad [f(t), g(t+\tau)] = 0$$

$$[f+g, f+g] = [f, f] + [g, g]$$

$$[f+g, f(t+\tau) + g(t+\tau)] = [f, f(t+\tau)] + [g, g(t+\tau)]$$

Ainsi, la fonction de corrélation Γ (ainsi que le spectre E) de la somme $f+g$ est la somme des fonctions de corrélations (ou des spectres) de f et de g .

Application - Soit alors une suite de fonctions indépendantes $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$ que nous supposons uniformément bornées.

Soit $g_n = \sum_{k=0}^n f_k$ et soit :

F_k la fonction de distribution associée à f_k

G_n la fonction de distribution associée à g_n

D'après le paragraphe précédent, on en déduit :

$$G_1 = \int F_0 dF_1 = \int F_1 dF_0 = F_0 * F_1$$

Par récurrence :

$$G_n = F_0 * F_1 * F_2 * \dots * F_n$$

Posons : $\sigma_k^2 = \int y^2 dF_k = [f_k, f_k]$

$$S_n^2 = \sum_{k=0}^n \sigma_k^2 = \int y^2 dG_n$$

COASTAL ENGINEERING

On sait alors, comme conséquence du théorème de Liapounoff, que $\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ a pour loi $G_n(\frac{\sum x_i}{n})$ et que cette loi tend vers une loi de Gauss de moyenne et d'écart quadratique 1.

Nous supposons donc, hypothèse (H_4) , que la fonction f que nous considérons est constituée par une somme de fonctions indépendantes et uniformément bornées, en nombre suffisant pour que le théorème précédent s'applique.

Notons que, vue la précision recherchée, ce nombre n'a pas besoin d'être très grand et qu'on peut par exemple reconstituer une houle avec un petit nombre de composantes incommensurables.

En généralisant, on trouve que la fonction de distribution $F(y_0, y_1, \dots, y_n)$ associée à :

$$\left\{ f^{(p)}(t), f^{(p_1)}(t+\tau_1), f^{(p_n)}(t+\tau_n) \right\}$$

est une loi de Gauss caractérisée par la matrice des covariances :

$$a_{hk} = \left[f^{(p_h)}(t+\tau_h), f^{(p_k)}(t+\tau_k) \right] = \Gamma [p_h, p_k, \tau_k - \tau_h]$$

F est donc une distribution "continue" à laquelle on peut associer une densité $p = \frac{dF}{dV}$ et nous aurons :

$$p(y_0, y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\|a_{nk}\|}} \exp\left\{-\frac{1}{2} B_{nk} y_n y_k\right\}$$

$\|a_{nk}\|$ déterminant de la matrice a_{nk} ,
 B_{nk} matrice inverse de a_{nk} .

On trouvera en annexe l'expression détaillée de cette loi.

PROPRIETES DES MOMENTS DE $E(\sigma)$.

Considérons la fonction de distribution $E(\sigma)$. Comme elle est symétrique, nous nous limiterons à $\sigma \geq 0$.

On sait que $y(p) = \log(m_p)$ est convexe, c'est-à-dire que si p, \bar{h}, κ sont trois nombres positifs :

$$\frac{y(p) - y(p-\bar{h})}{\bar{h}} \leq \frac{y(p+\kappa) - y(p-\bar{h})}{\bar{h} + \kappa} \leq \frac{y(p+\kappa) - y(p)}{\kappa}$$

et

$$y(p) \leq \frac{\bar{h} y(p+\kappa) + \kappa y(p-\bar{h})}{\bar{h} + \kappa}$$

Soit alors $\sigma_{pq} = \sqrt{\frac{m_p}{m_q}}$, on en déduit :

$$\sigma_{p, p-\bar{h}} \leq \sigma_{p+\kappa, p-\bar{h}} \leq \sigma_{p+\kappa, p}$$

et

$$(m_p)^{\bar{h} + \kappa} \leq (m_{p+\kappa})^{\bar{h}} \cdot (m_{p-\bar{h}})^{\kappa}$$

Ces inégalités de convexité sont fréquemment utilisées.

ETUDE THEORIQUE DE L'EXPLOITATION DES ENREGISTREMENTS DE HOULE

Faisons alors l'hypothèse $[H_5]$ que $E(\sigma)$ est "à support compact" c'est-à-dire qu'il existe deux nombres σ_{\min} et σ_{\max} tels que :

$$\begin{aligned} \sigma \leq \sigma_{\min} &\Rightarrow E(\sigma) = 0 & \sigma \geq \sigma_{\min} & E(\sigma) > 0 \\ \sigma \leq \sigma_{\max} &\Rightarrow E(\sigma) \leq E_0 & \sigma \geq \sigma_{\max} & E(\sigma) = E_0 \end{aligned}$$

On sait alors [3], [2], que :

$$\begin{aligned} \sigma_{\min} &\leq \sigma_{pq} \leq \sigma_{\max} \\ \sigma_{pq} &\rightarrow \sigma_{\max} \quad \text{pour } p \neq q \rightarrow +\infty \\ \sigma_{pq} &\rightarrow \sigma_{\min} \quad \text{" } p \neq q \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

En particulier, si nous posons $\sigma_n = \sqrt{\frac{m_{2n}}{m_{2n-2}}}$, la suite σ_n est monotone et a pour limites σ_{\min} et σ_{\max} .

APPLICATION.

La considération des quantités σ_{pq} va nous permettre d'évaluer les valeurs moyennes des dérivées de f , nous avons en effet :

$$\begin{aligned} \|f^{(n)}\| &= \sqrt{m_{2n}} = [\sigma_{2n,0}]^n \|f_0\| \\ \|f^{(n)}\| &= \sigma_n \|f_{n-1}\| \end{aligned}$$

Ceci va nous permettre d'évaluer le "reste" de certaines formules algébriques obtenues au paragraphe "Propriétés algébriques de $\gamma(\tau)$ ".

Soit par exemple :

$$\frac{1}{T} \int_0^T f^{(n+1)}(t) f^{(n-1)}(t+\tau) dt = -\frac{1}{T} \int_0^T f^{(n)}(t) f^{(n)}(t+\tau) dt + \frac{1}{T} [f^{(n)}(t) f^{(n-1)}(t+\tau)]_0^T$$

lorsque $T \rightarrow \infty$, nous obtenons la formule connue :

$$[f^{(n+1)}(t), f^{(n-1)}(t+\tau)] = - [f^{(n)}(t) f^{(n)}(t+\tau)]$$

Si nous écrivons :

$$\frac{1}{T} \int_0^T f^{(n+1)}(t) f^{(n-1)}(t+\tau) dt = -\frac{1}{T} \int_0^T f^{(n)}(t) f^{(n)}(t+\tau) dt$$

nous commettons une erreur qui, en valeur relative, est de l'ordre de grandeur de :

$$\Delta \approx \frac{\frac{1}{T} f^{(n+1)}(t) f^{(n-1)}(t+\tau)}{[f^{(n)}(t) f^{(n)}(t)]}$$

$$\Delta \approx \frac{1}{T} \frac{\|f^{(n+1)}\|}{\|f_n\|} \cdot \frac{f^{(n)}(t) f^{(n-1)}(t+\tau)}{\|f_n\| \|f_{n-1}\|} = \frac{1}{T \sigma_n} \cdot \frac{f^{(n)}(t)}{\|f_n\|} \cdot \frac{f^{(n-1)}(t+\tau)}{\|f_{n-1}\|}$$

Le produit des deux derniers termes est en général inférieur à 10.

On a donc : $\Delta < \frac{1}{100}$ si $T \sigma_n > 1000$ et $T > \frac{1000}{\sigma_n}$

Comme $\sigma_n < \sigma_1$ et que $\frac{1}{2\pi\sigma_1}$ mesure une période apparente de la houle, on trouve $T > \frac{1000}{2\pi} T_1$, ce qui est en général réalisé assez largement.

COASTAL ENGINEERING

RELATIONS ENTRE LE SPECTRE ET LES DISTRIBUTIONS ASSOCIEES A $f(t)$

Cette partie sera orientée vers les relations entre le spectre et les distributions associées à f . Le spectre lui-même sera caractérisé par la suite de ses moments $m_0, m_2, m_4, \dots, m_{2n}$. Les trois premiers moments ont d'ailleurs une importance spéciale à la fois parce que l'on pense souvent que le spectre général des houles de vent ne dépend que de trois paramètres, et aussi parce que un certain nombre de phénomènes ne dépendent que de ces trois moments.

Cela étant, on peut se proposer deux buts :

a) D'abord, il est évident que certaines distributions (les hauteurs par exemple) sont intéressantes en soi. Il faut donc, connaissant le spectre, les obtenir.

b) Mais l'opération inverse peut être plus importante. Certaines distributions sont faciles à obtenir en pratique. Elles permettront donc de calculer certains éléments du spectre (voir Introduction).

La plupart des propriétés qui apparaissent ont déjà été étudiées par Longuet-Higgins [3]. Nous avons conservé une assez grande généralité. En effet, si la plupart des appareils donnent un enregistrement de $f(t)$, il ne faut pas oublier qu'ils pourraient aussi fournir f' ou f'' au prix de modifications assez faibles.

DISTRIBUTION DE $f(t)$ ET DE SES DERIVEES.

Rappelons les résultats de la première partie. La distribution de probabilité associée à la suite $f^{(0)}(t), f^{(1)}(t, \tau_1), f^{(n)}(t, \tau_n)$ suite dont la matrice des covariances est :

$$a_{nk} = \Gamma [p_n, p_k, \tau_n - \tau_k]$$

$$\text{est } p(y_0, y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{\|a_{nk}\|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} b_{nk} y_n y_k \right\}$$

a) Nous allons appliquer ceci à f et f' , on trouve :

$$\text{pour } f, p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{m_0}} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{x^2}{m_0} \right)$$

$$\text{pour } f', p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{m_2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{x^2}{m_2} \right)$$

Ces distributions sont faciles à obtenir, mais on voit qu'elles donnent très peu de renseignements sur le spectre. Seulement un moment pour chacune d'entre elles.

b) Distribution associée au couple $f(t), f(t+\tau)$

$$p \left(f = y, f(t, \tau) = z \right) = \frac{1}{2\pi \sqrt{m_0^2 - \gamma(\tau)^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(m_0 y^2 - 2\gamma y z + m_0 z^2)}{m_0^2 - \gamma^2} \right\}$$

ETUDE THEORIQUE DE L'EXPLOITATION DES ENREGISTREMENTS DE HOULE

Comme cette distribution contient deux variables, elle est moins facile à obtenir que les précédentes et les résultats seront moins précis. On peut tourner la difficulté en étudiant les fonctions $\Phi_1(t) = \inf [f, f(t+\tau)]$ dont les distributions sont :

$$F_1(v) = \int_{-\infty}^v \int_{-\infty}^v p(y, z) dy dz$$

$$1 - F_2(v) = \int_v^{\infty} \int_v^{\infty} p(y, z) dy dz$$

Les distributions F_1 et F_2 sont expérimentalement aussi simples à obtenir que les fonctions p_1 et p_2 précédentes. Elles dépendent des paramètres m_0 et $\gamma(\tau)$ et permettent donc d'obtenir ces deux nombres. Nous n'insistons pas cependant car la méthode est très lourde.

DISTRIBUTION DES POINTS SINGULIERS ASSOCIES A $f(t)$ OU A SES DERIVEES.

Nous allons étudier les points définis par l'équation du type $f^{(p)}(t+\tau) = \alpha$ (τ et α fixés). Ces points constituent sur l'axe des t une "population" (un sous-espace) sur lequel on peut définir et étudier une probabilité.

Posons $N_T(f=\alpha)$ nombre de points sur $(0, T)$ où $f=\alpha$ divisé par T
 $N(f=\alpha)$ limite quand $T \rightarrow \infty$ de $N_T(f=\alpha)$

Soit alors une fonction ϕ quelconque. Nous considèrerons de même :

$$N_T \{ f=\alpha \quad \phi \in (y, y+dy) \}$$

$$N \{ f=\alpha \quad \phi \in (y, y+dy) \}$$

Et nous aurons la "probabilité" définie sur la suite $f=\alpha$

$$\omega \{ \phi \in (y, y+dy) \} = \frac{N(f=\alpha, \phi \in (y, y+dy))}{N(f=\alpha)}$$

Ces définitions, (calquées sur la définition de la probabilité conditionnelle) sont parfaitement cohérentes et analogues à celles de la première partie (mais on opère sur une suite discrète et non sur des intervalles). De plus, il existe un lien entre les N_T et les F_T déjà définis. On a en effet :

$$N_T(f=\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_T(f=\alpha \quad f'=x) |x| dx = 2 \int_0^{\infty} p_T(f=\alpha \quad f'=x) x dx$$

si la loi est symétrique en f'

$$N_T(f=\alpha, \phi=y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_T(f=\alpha \quad f'=x \quad \phi=y) |x| dx = 2 \int_0^{\infty} p_T(f=\alpha \quad f'=x \quad \phi=y) x dx$$

(N_T désigne ici une densité en y)

Et à la limite :

$$N(f=\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(f=\alpha \quad f'=x) |x| dx$$

$$N(f=\alpha \quad \phi=y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p[f=\alpha, f'=x, \phi=y] |x| dx \quad (N \text{ densité en } y)$$

COASTAL ENGINEERING

Les démonstrations sont reportées en annexe. Les N_T ou les N sont d'autre part plus faciles à obtenir par comptage que les p .

Nous allons appliquer ceci à quelques points particuliers.

Intersection avec des horizontales -

$$N(f=a) = 2 \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{a^2}{2m_0} - \frac{x^2}{m_2}\right) x dx = N_0 \exp\left(-\frac{a^2}{2m_0}\right)$$

$$N_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\sigma_2}$$

En généralisant immédiatement on obtient :

$$N(f^{(p)}=a) = N_p \exp\left(-\frac{a^2}{2m_{2p}}\right) \quad N_p = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{m_{2p+2}}{m_{2p}}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\sigma_{2p}}$$

Distribution de f quand $f' = 0$; maximas et minimas -

La matrice des corrélations de f, f', f'' est

$$\begin{vmatrix} m_0 & 0 & -m_2 \\ 0 & m_2 & 0 \\ -m_2 & 0 & m_4 \end{vmatrix}$$

La matrice inverse

$$\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} m_2 m_4 & 0 & m_2^2 \\ 0 & \Delta & 0 \\ m_2^2 & 0 & m_2 m_0 \end{vmatrix}$$

en posant $\Delta = m_0 m_4 - m_2^2$

D'où $p^* \{f = x_1, f' = 0, f'' = x_3\} = \frac{1}{2\pi^{3/2} \sqrt{\Delta} m_2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{m_4 x_1^2 + 2m_2 x_1 x_3 + m_0 x_3^2}{\Delta}\right\}$

et $N\{f = x_1, f' = 0, f'' < 0\} = \int_0^{\infty} p^* x_3 dx_3$

Les calculs ont été faits par Longuet-Higgins. On pose

$$\begin{cases} \eta = \frac{x_1}{\sqrt{m_0}} \\ \epsilon^2 = \frac{\Delta}{m_0 m_4} \end{cases}$$

Et on obtient : $N = N_1 \frac{1}{2} p(\eta)$

$$p(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\eta(1-\epsilon^2)^{1/2} / \epsilon} \left[\epsilon \exp\left(-\frac{1}{2} \eta^2 / \epsilon^2\right) + (1-\epsilon^2)^{1/2} \eta \exp\left(-\frac{1}{2} \eta^2\right) \right] \exp\left(-\frac{1}{2} x^2\right) dx$$

Généralisation. Distribution de f quand $f^{(2p-1)} = 0$ -

Posant $\Delta_{02p} = m_0 m_{4p} - m_{2p}^2$
 $\epsilon_{02p}^2 = \Delta_{02p} / m_0 m_{4p}$
 $\eta = x_1 / \sqrt{m_0}$

On a $p\{f = x_1, f^{(2p-1)} = 0, f^{2p} = x_3\} = \frac{1}{2\pi^{3/2} \sqrt{\Delta_{02p}} m_{4p-2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{m_{4p} x_1^2 + 2m_{2p} x_1 x_3 + m_0 x_3^2}{\Delta_{02p}}\right]$

D'où $N = N_{2p-1} \frac{1}{2} p^*(\eta)$

$$p^*(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\eta(1-\epsilon_{02p}^2)^{1/2} / \epsilon_{02p}} \left[\epsilon_{02p} \exp\left(-\frac{1}{2} \eta^2 / \epsilon_{02p}^2\right) + (1-\epsilon_{02p}^2)^{1/2} \eta \exp\left(-\frac{1}{2} \eta^2\right) \right] \exp\left(-\frac{1}{2} x^2\right) dx$$

$p^*(\eta)$ et $p(\eta)$ sont donc identiques en remplaçant ϵ par ϵ_{02p} .

ETUDE THEORIQUE DE L'EXPLOITATION DES ENREGISTREMENTS DE HOULE

Distribution de f quand $f''=0$. Points d'inflexion. - Le calcul est analogue au précédent, mais la matrice s'écrit :

$$D'où N(f=x, f''=0) = \frac{1}{2\pi^{3/2} \sqrt{\Delta m_6}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{m_4}{\Delta} x^2 + \frac{m_6}{\Delta} y^2\right)\right] dy$$

$$N(f=x, f''=0) = N_2 \sqrt{\frac{m_4}{2\pi\Delta}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{m_4}{\Delta} x^2\right]$$

Généralisation. Distribution de f quand $f^{(2p)}=0$

On obtient de la même façon :

$$N\left[f=x, f^{(2p)}=0\right] = N_{2p} \sqrt{\frac{m_{4p}}{2\pi \Delta_{02p}}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{m_{4p}}{\Delta_{02p}} x^2\right]$$

Les distributions sont donc cette fois des distributions de Gauss.

On peut généraliser encore en remplaçant f par $f^{(k)}$, il suffit d'ajouter $2k$ aux moments considérés. On voit ainsi qu'on a obtenu la distribution générale de $f^{(p)}$ quand $f^{(p+q)}=0$

Intersections entre $f(t)$ et $f(t+\tau)$ - Nous ne dirons rien de la distribution f quand $f(t+\tau)=0$, qui est facile à obtenir mais sans intérêt. Par contre, une autre fréquence est plus intéressante, c'est celle des points où $f(t) = f(t+\tau)$

$$\text{Posons : } z = f(t+\tau) - f(t) \qquad N(z=0) = \frac{\sqrt{[z', z']}}{\sqrt{[z, z]}}$$

$$[z', z'] = 2 m_2 - \gamma^{(2)}(\tau) \qquad [z, z] = m_0 - \gamma(\tau)$$

$$D'où N[f=f(t+\tau)] = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{[z', z']}}{\sqrt{[z, z]}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{m_2 - \gamma^{(2)}(\tau)}{m_0 - \gamma(\tau)}}$$

Quand τ devient assez grand $\gamma^{(2)}(\tau)$ et $\gamma(\tau) \rightarrow 0$ donc $N(\tau) \rightarrow N_0$

$$\text{Quand } \tau \rightarrow 0, \text{ nous avons } \gamma^{(2)}(\tau) = m_2 - m_4 \frac{\tau^2}{2} + \dots$$

$$\gamma(\tau) = m_0 - m_2 \frac{\tau^2}{2} + \dots$$

$$\text{Donc } N(\tau) \rightarrow N_1$$

MOYENNES ASSOCIEES AUX POINTS SINGULIERS PRECEDENTS.

On est très vite limité par la difficulté qu'il y a à calculer effectivement ces moyennes. Il semble que seules les amplitudes (différence entre maxims et minims) peuvent donner lieu à des moyennes faciles à obtenir.

Notons ainsi la moyenne des amplitudes (Longuet-Higgins) :

$$M_1 = 2 \sqrt{m_0} \left(\frac{1}{2}\pi\right)^{1/2} (1 - \epsilon^2)^{1/2}$$

Et, de même, la moyenne des amplitudes de f'

$$M_2 = 2 \sqrt{m_1} \left(\frac{1}{2}\pi\right)^{1/2} (1 - \epsilon_1^2)^{1/2}$$

CONCLUSION

Ainsi, pour obtenir les trois premiers moments, nous avons vu quelques

COASTAL ENGINEERING

méthodes simples :

1. Le comptage de $N_0(\xi = 0)$ et de $N_1(\xi' = 0)$ qui donne m_2/m_0 et m_4/m_2
2. Le comptage des fréquences $N(\xi = a)$ qui donne m_2/m_0 et m_0
3. La moyenne des amplitudes qui donne une relation entre m_0 et ϵ . Il suffit donc d'associer 1. et 3. ou 1. et 2. C'est cette méthode qui a effectivement été retenue à Chatou. Il va de soi que la mise au point d'appareils de comptage différents pourrait conduire à utiliser des distributions différentes parmi celles qui ont été étudiées.

PROBLEMES PRATIQUES LIES A L'ENREGISTREMENT DES HOULES

Cette fin d'étude est consacrée à deux problèmes pratiques liés à l'exploitation des enregistrements de houle.

Un des types d'appareil utilisé (capteurs de pression) enregistre non pas la fonction $\xi(t)$ mais une fonction $\Phi(t)$ qui lui est liée (pression sur le fond au lieu de dénivellation en surface). On peut admettre que l'on passe du spectre de ξ à celui de Φ au moyen d'un facteur correctif $K(\sigma)$ connu. Il nous faut donc étudier les problèmes posés par cette correction.

L'autre problème est celui de la présence de "fonctions parasites" ou d'erreurs quelconques : le déplacement du niveau moyen, la présence de phénomènes d'agitation non liés à la houle en sont des exemples. Certains de ces phénomènes sont connus et on peut essayer d'évaluer leur influence et d'en tenir compte. De façon plus générale, il faut évaluer la marge d'incertitude sur les résultats obtenus.

RESTITUTION.

Si le spectre est continu, ce qui est le cas général (et le cas discontinu ne nécessiterait que de faibles modifications), on peut poser :

$dE(\sigma) = \frac{1}{2} A(\sigma) d\sigma$. La présence du facteur $\frac{1}{2}$ permet de ne considérer que l'intervalle $[0 \leq \sigma < \infty]$ et d'avoir :

$$m_n = \int_0^{\infty} \sigma^n A(\sigma) d\sigma$$

Le problème est donc de trouver le spectre $A^*(\sigma)$ en surface connaissant $A(\sigma)$. Il est résolu par la formule :

$$A^*(\sigma) = K(\sigma) \times A(\sigma)$$

$$K(\sigma) = \text{Ch}\left(\frac{2\pi d}{L}\right) \quad \text{facteur correctif.}$$

En fait, nous ne pouvons nous contenter de la formule précédente, car nous ne connaissons pas directement $A(\sigma)$. Notons que si $\Theta(u)$ est la transformée de Fourier de $K(\sigma)$

$$\Theta(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma u} K(\sigma) d\sigma$$

on a : $\gamma^*(\tau) = \gamma * \Theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(t-u) \Theta(u) du$

ETUDE THEORIQUE DE L'EXPLOITATION DES ENREGISTREMENTS DE HOULE

Mais nous désirons résoudre le problème par des procédés algébriques n'impliquant qu'une connaissance partielle de $\mathcal{A}(\sigma)$. Nous sommes donc amenés à chercher la suite $m_0^*, m_2^*, \dots, m_{2n}^*$ connaissant m_0, m_2, \dots, m_{2n} . Et, conformément à ce que nous avons vu dans la deuxième partie, nous nous intéressons surtout aux trois premiers moments.

Considérons une expression approchée de $K(\sigma)$ au moyen d'un polynôme. D'après (H5) il suffit de réaliser l'approximation sur le segment $(\sigma_{\min}, \sigma_{\max})$. Ce problème est toujours possible et nous pouvons poser :

$$K(\sigma) \approx a_0 + a_2 \sigma^2 + \dots + a_{2p} \sigma^{2p}$$

Nous aurons alors :

$$m_0^* = a_0 m_0 + a_2 m_2 + \dots + a_{2p} m_{2p}$$

$$m_2^* = a_0 m_2 + a_2 m_4 + \dots + a_{2p} m_{2p+2}$$

$$m_{2n}^* = a_0 m_{2n} + a_2 m_{2n+2} + \dots + a_{2p} m_{2p+2n}$$

On voit que la connaissance de n moments en surface implique celles de $(n+p)$ moments au fond. Nous nous limiterons à $2p=4$, ce qui est cohérent avec les hypothèses déjà faites.

Nous aurons alors :

$$m_{2n}^* = a_0 m_{2n} + a_2 m_{2n+2} + a_4 m_{2n+4}$$

$$= \left[a_0 m_{2n} + a_2 m_{2n+2} + a_4 \frac{m_{2n+2}^2}{m_{2n}} \right] + a_4 m_{2n+4} \left[1 - \frac{m_{2n+2}^2}{m_{2n} m_{2n+4}} \right]$$

$$= m_{2n} K\left(\frac{m_{2n+2}}{m_{2n}}\right)$$

$$m_{2n}^* = m_{2n} K(\sigma_{2n+2}) \left[1 + \frac{a_4}{K(\sigma_{2n+2})} \epsilon_{n, n+2}^2 \sigma_{2n+4}^2 \sigma_{2n+2}^2 \right]$$

C'est de cette formule que nous allons nous servir. Retranscrivons-la pour $n = 0, 1$ et 2 . On trouve :

$$\begin{aligned} m_0^* &= m_0 K(\sigma_2) \left\{ 1 + \frac{a_4}{K(\sigma_2)} \epsilon_4^2 \sigma_4^2 \sigma_2^2 \right\} \\ m_2^* &= m_2 K(\sigma_4) \left\{ 1 + \frac{a_4}{K(\sigma_4)} \epsilon_6^2 \sigma_6^2 \sigma_4^2 \right\} \\ m_4^* &= m_4 K(\sigma_6) \left\{ 1 + \frac{a_4}{K(\sigma_6)} \epsilon_8^2 \sigma_8^2 \sigma_6^2 \right\} \end{aligned}$$

On voit qu'il subsiste un certain nombre d'inconnues : $\epsilon_6^2, \epsilon_8^2$ et σ_8^2, σ_6^2 . Mais nous pouvons remarquer que le terme où ils interviennent est un terme "complémentaire" et que nous pourrions faire des hypothèses sur ϵ_6^2 et ϵ_8^2 sans prendre beaucoup de risques d'erreur.

Nous savons déjà deux choses :

- a) la suite σ_{2n}^2 est croissante,
- b) la suite ϵ_{2n}^2 est décroissante et tend vers 0.

COASTAL ENGINEERING

Nous supposons donc que σ_{2m}^2 est une suite arithmétique.

Nous aurons alors :

$$\begin{aligned} \sigma_2^2 &= \sigma_2^2 & \epsilon_4^2 &= \frac{h^2}{\sigma_2^2 + h^2} \\ \sigma_4^2 &= \sigma_2^2 + h^2 & \epsilon_{2m}^2 &= \frac{h^2}{\sigma_2^2 + (n-1)h^2} \\ \sigma_{2m}^2 &= \sigma_2^2 + (n-1)h^2 \end{aligned}$$

Posons alors $\lambda_{2m} \sigma_2^4 = \epsilon_{2m}^2 \sigma_{2m}^2 \sigma_{2m-2}^2$

Nous aurons facilement : $\lambda_{2m} = \frac{h^2}{\sigma_2^2} \left[1 + (n-2) \frac{h^2}{\sigma_2^2} \right]$

D'où

$$m_{2m}^* = m_{2m} K(\sigma_{2m+2}) \left[1 + \frac{a_4 \sigma_2^2}{K(\sigma_{2m+2})} \frac{h^2}{\sigma_2^2} \left[1 + n \frac{h^2}{\sigma_2^2} \right] \right]$$

Ce que nous retranscrivons pour les trois premiers moments, appelant ϵ_4, ϵ et remplaçant h^2/σ_2^2 par sa valeur :

$$\begin{aligned} m_0^* &= m_0 K(\sigma_2) \left[1 + \frac{a_4 \sigma_2^2}{K(\sigma_2)} \cdot \frac{\epsilon^2}{1 - \epsilon^2} \right] \\ m_2^* &= m_2 K(\sigma_4) \cdot \left[1 + \frac{a_4 \sigma_2^2}{K(\sigma_4)} \frac{\epsilon^2}{(1 - \epsilon^2)^2} \right] \\ m_4^* &= m_4 K(\sigma_6) \cdot \left[1 + \frac{a_4 \sigma_2^2}{K(\sigma_6)} \frac{\epsilon^2}{(1 - \epsilon^2)^2} (1 + \epsilon^2) \right] \end{aligned}$$

Remarque - Etude de $K(\sigma)$ - Les formules précédentes ne sont valables q si les termes "correctifs" méritent effectivement ce nom, c'est-à-dire sont suffisamment petits. Comme l'on a :

$$K = ch \left(\frac{2\pi d}{L} \right) = K \left\{ \frac{d}{2\pi q} \sigma^2 \right\} \quad \text{nous aurons des inégalités portant}$$

$\frac{d}{2\pi q} \sigma_{\max}^2$ et $\frac{d}{2\pi q} \sigma_{\text{moy}}^2$. On aura à vérifier deux conditions :

a) $\frac{a_4 \sigma_2}{K(\sigma_2)} \cdot \frac{\epsilon^2 (1 + \epsilon^2)}{(1 - \epsilon^2)^2}$ de l'ordre de ϵ^2 (termes correctifs faibles).

Cela nous donne :

$$T_{\text{moy}} \geq \sqrt{4d} \quad T_{\text{moy}} = 2\pi/\sigma_2$$

b) σ_{\max} doit être tel que l'approximation parabolique soit encore valable. Nous admettons que ceci est réalisé si $d/L_{\text{max}} \leq \frac{1}{2}$, ce qui conduit à :

ETUDE THEORIQUE DE L'EXPLOITATION DES ENREGISTREMENTS DE HOULE

$$\frac{2\pi}{\sigma_{\max}} = T_{\min} \geq \sqrt{\frac{4}{3}d}$$

On voit ainsi les limitations de l'appareil suivant les valeurs de d .
Pratiquement, la zone intéressante est $d < 10m$.

PROBLEMES LIES A L'INCERTITUDE DES RESULTATS.

Supposons qu'à la fonction f étudiée se superpose une fonction Δf parasite due à n'importe quelle cause (déplacement du niveau moyen, réactions de l'appareil, etc..). Nous allons voir que l'on peut passer des résultats relatifs à $f, \Delta f$ à ceux de f à condition du moins de connaître Δf . De plus, si Δf est suffisamment faible, l'erreur introduite est négligeable.

Une première difficulté provient du fait que, tandis que f représente la houle et satisfait donc aux hypothèses (H_1 à H_5), Δf ne représente rien et n'a aucune raison de satisfaire à ces hypothèses.

Mais en fait, ce n'est pas à Δf que nous nous intéressons, mais à Δf de 0 à T . Nous pouvons donc remplacer Δf par une fonction périodique de période T (qui satisfait à la plupart des hypothèses, mis à part celles conduisant à la loi de Gauss). Les résultats expérimentaux seront les mêmes car les opérations faites concernent toutes le segment $(0, T)$.

Enfin, comme $f(t)$ n'a aucune périodicité en T , nous pouvons supposer que f et Δf sont indépendantes. Nous supposons aussi que Δf est à moyenne nulle car s'il n'en était pas ainsi, nous ferions une translation de Δf sur l'axe des ordonnées. La fonction Δf ainsi définie a des fonctions de distributions faciles à calculer et identiques à celles obtenues sur $(0, T)$. Cela va nous donner les fonctions de distributions de $f + \Delta f$.

Etude directe des fonctions de distribution -

Soit $p(y)$ la densité associée à f
 $\omega(y)$ " " " Δf
 $q(y)$ " " " $f + \Delta f$

L'application des théorèmes sur les fonctions indépendantes nous donne :

$$q(y) = p * \omega = \int_{-\infty}^{+\infty} p(y-u) \omega(u) du$$

Cette formule résout le problème, mais nous allons, comme $\omega(u)$ est petit, utiliser un développement en série :

$$p(y-u) = p(y) - u p'(y) + \frac{u^2}{2!} p''(y) + \dots + (-1)^n \frac{p^{(n)}(y)}{n!} u^n + \dots$$

Nous aurons donc :

$$q(y) = p(y) + \frac{\mu_2}{2} p''(y) + \dots + (-1)^n \frac{\mu_n}{n!} p^{(n)}(y) + \dots$$

COASTAL ENGINEERING

Avec
$$\mu_m = \int_{-\infty}^{+\infty} u^m \omega(u) du = M_{\pi} [\Delta f^m] \quad \text{et} \quad \gamma_1 = 0$$

Si Δf est bornée par A on a $M_{\pi} [\Delta f^m] < A^m$, d'où une convergence assurée de la série précédente et une évaluation de la différence entre p et q . En particulier, si A est très petit $q(y) \approx p(y)$

Généralisation - Le calcul précédent se généralise aux distributions à plusieurs dimensions. Ce calcul est fait en annexe. On peut donc, en intégrant, obtenir aussi les distributions des maximas et minimas.

Autre méthode - Une méthode différente est de considérer directement le spectre de la fonction (périodique) Δf . Ce spectre est facile à obtenir et en particulier, on peut trouver la suite des moments $\Delta m_0, \Delta m_1, \dots, \Delta m_n$

Or, on a vu dans la première partie que, aussi bien le spectre que les moments ou la fonction de corrélation $\gamma(\tau)$ s'ajoutent. On aura donc $E + \Delta E$, $\gamma + \Delta \gamma$ et $m_{2n} + \Delta m_{2n}$. En particulier les fréquences d'intersections seront :

$$N_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{m_{2n} + \Delta m_{2n}}{m_0 + \Delta m_0}} \quad N_1 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{m_4 + \Delta m_4}{m_2 + \Delta m_2}}$$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.

1. Bass, J. (1959). Suites uniformément denses, Moyennes trigonométriques, Fonctions pseudo-aléatoires - Bull. Soc. Math. France - 87, pp. 1 à 64.
2. Loève, M. (1956). Probability Theory - Van Nostrand - New-York.
3. Cartwright, D.E. et Longuet-Higgins, M.S. (1956). Statistical distribution of the maxima of a random variable - Proc. of the Roy. Soc. London - Series A, Vol. 237, pp. 212-232.
4. Rice, S.O. (1944). Bell Syst. Tech. J. 23, 282.
(1945). Bell Syst. Tech. J. 24, 46.
5. Valembois, J., Germain, J. et Jaffry, P. (1956). Connaissance de la houle naturelle : le point de vue de l'ingénieur - Compte-rendu des 4ème Journées de l'Hydraulique - pp. 95-99.

ETUDE THEORIQUE DE L'EXPLOITATION DES ENREGISTREMENTS DE HOULE

ANNEXE A LA PREMIERE PARTIE.

Nous allons calculer quelques-unes des matrices de corrélations le plus fréquemment rencontrées. Toutes ces matrices s'exprimeront au moyen de la fonction $\gamma(\tau)$ et de ses dérivées. Comme $\gamma^{(2n)}(0) = (-1)^n m_{2n}$ nous avons aussi fait intervenir les moments $m_0, m_2, m_4, \dots, m_n$.

a. Suite $[f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(2n)}(t)]$ n pair.

La matrice s'écrit :

$$\begin{vmatrix} m_0 & 0 & -m_2 & 0 & \dots & (-1)^{\frac{n}{2}} m_n \\ 0 & m_2 & 0 & -m_4 & \dots & 0 \\ -m_2 & 0 & m_4 & 0 & \dots & (-1)^{\frac{n}{2}+1} m_{n+2} \\ 0 & -m_4 & 0 & m_6 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{\frac{n}{2}} m_n & (-1)^{\frac{n}{2}+1} m_{n+2} & \dots & \dots & \dots & m_{2n} \end{vmatrix}$$

b. Suite $[f(t), f^{(1)}(t+\tau_1), f^{(2)}(t+\tau_2), \tau_1), f^{(3)}(t+\tau_1+\tau_2+\tau_3)]$

La matrice s'écrit :

$$\begin{vmatrix} m_0 & \gamma'(\tau_1) & \gamma''(\tau_1+\tau_2) & \gamma^{(3)}(\tau_1+\tau_2+\tau_3) \\ \gamma'(\tau_1) & m_2 & \gamma^{(2)}(\tau_2) & \gamma^{(4)}(\tau_2+\tau_3) \\ \gamma''(\tau_1+\tau_2) & \gamma^{(3)}(\tau_2) & m_4 & \gamma^{(5)}(\tau_3) \\ \gamma^{(3)}(\tau_1+\tau_2+\tau_3) & \gamma^{(4)}(\tau_2+\tau_3) & \gamma^{(5)}(\tau_3) & m_6 \end{vmatrix}$$

c. Notons que, lorsque la distribution est continue et symétrique, nous avons, en posant $dE(\sigma) = \frac{1}{2} A(\sigma) d\sigma$

$$\begin{aligned} \gamma(\tau) &= \int_0^\infty A(\sigma) \cos(\sigma\tau) d\sigma & \gamma(0) &= \int_0^\infty A(\sigma) d\sigma = m_0 \\ \gamma'(\tau) &= -\int_0^\infty A(\sigma) \sigma \sin(\sigma\tau) d\sigma & \gamma'(0) &= 0 \end{aligned}$$

et, plus généralement :

$$\begin{aligned} \gamma^{(2m)}(\tau) &= (-1)^m \int_0^\infty \cos(\sigma\tau) \sigma^{2m} A(\sigma) d\sigma & \gamma^{(2m)}(0) &= (-1)^m m_{2m} \\ \gamma^{(2m+1)}(\tau) &= (-1)^{m+1} \int_0^\infty \sin(\sigma\tau) \sigma^{2m+1} A(\sigma) d\sigma & \gamma^{(2m+1)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Ces formules sont utiles parce qu'elles font intervenir uniquement des variables réelles. Elles montrent que la connaissance de $\gamma(\tau)$ et de toutes ses dérivées (ou de $A(\sigma)$) permet de calculer facilement les matrices de corrélations précédentes.

ANNEXE A LA DEUXIEME PARTIE.

a. Supposons que $f'(t)$ soit une constante (La fonction $f(t)$ serait alors composée de segments de droites reliés par des sauts).

N_T étant le nombre (déjà défini) des intersections avec la droite $f = a$ et da, dx deux variables reliées par $da = |f'| dx$

Nous avons :

$$\sum_{N_T} dx = N_T dx = p_T(f=a) da \quad \text{soit} \quad N_T = p(f=a) |f'|$$

De même, si nous définissons :

COASTAL ENGINEERING

N_T = nombre de points où $\{f=a \text{ et } \phi \in (y, y+dy)\}$ nous avons

$$\sum_{N_T} dx = N_T dx = p_T \{f=a \text{ et } \phi \in (y, y+dy)\} |f'|$$

Soit $N_T = p_T \{f=a \text{ et } \phi \in (y, y+dy)\} |f'|$

définissant une densité $N_T^* = \frac{N_T}{dy}$ on a. $N_T^* = p(f=a, \phi=y) |f'|$

b. Si nous revenons au cas général où $f'(t)$ est variable, on voit qu'il suffit de considérer les probabilités composées :

$$p_T \{f=a, f'=x\} \quad \text{et} \quad p_T \{f=a, f'=x, \phi=y\}$$

et que les formules précédentes se généralisent en :

$$N_T = \int_{-\infty}^{+\infty} p_T(f=a, f'=x) |x| dx$$

$$N_T^* = \int_{-\infty}^{+\infty} p_T(f=a, f'=x, \phi=y) |x| dx$$

qui sont bien les formules données dans le texte.

ANNEXE A LA TROISIEME PARTIE.

La généralisation des formules données dans le texte au cas de distributions plus générales à n variables ne présente aucune difficulté théorique et n'est qu'un exercice de calcul.

Soit un espace à dimensions. Nous introduirons les notations suivantes:

$X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $Y(y_1, y_2, \dots, y_n)$ vecteurs de l'espace,
 $(dx) = dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ élément de volume,

$X \gg Y$ est équivalent à $x_1 \gg y_1, x_2 \gg y_2, \dots, x_n \gg y_n$

Cette relation d'ordre jouit de la propriété fondamentale suivante :

$$X \gg Y \quad \text{et} \quad X' \gg Y' \quad \text{entraîne} \quad X+X' \gg Y+Y'$$

Dans un tel espace, la notion de distribution de probabilité est très facile à définir. On peut définir soit la densité $p(X_0)$

$$p(X_0)(dx) = pr [X_0 \ll X \ll X_0 + dx]$$

soit la distribution F

$$F(X_0) = pr [X \ll X_0] = \int_{X \ll X_0} p(x)(dx)$$

Et l'on a $dF(x) = p(x)(dx)$ Si la distribution est continue.

Soient alors une variable X de fonction de distribution F et p ,
 et une variable Y de fonction de distribution F' et p' .

Si elles sont indépendantes on a :

$$pr [X_0 \ll X \ll X+dx \text{ et } Y_0 \ll Y \ll Y+dy] = p(X_0) p'(Y_0) (dx)(dy)$$

D'où il est facile de voir que, si G, g sont les fonctions de distribution de la somme $X+Y$, on a :

ETUDE THEORIQUE DE L'EXPLOITATION
DES ENREGISTREMENTS DE HOULE

$$G(x_0) = \int F(x_0 - x) dF'(x) = \int F'(x_0 - x) dF(x)$$

$$q(x_0) = \int p(x_0 - x) dF'(x) = \int p(x_0 - x) p'(x) dx$$

Soit, en abrégé

$$q = p * p'$$

Nous sommes donc arrivés à la même formule que dans le cas de deux variables.

Si X désigne la variable associée à $f(t), f^{(p)}(t+\tau_p), f^{(q)}(t+\tau_q) \dots f^{(n)}(t+\tau_n)$
 Y $\Delta f(t), \Delta f^{(p)}(t+\tau_p), \Delta f^{(q)}(t+\tau_q) \dots \Delta f^{(n)}(t+\tau_n)$

La formule précédente résout complètement le problème posé : trouver la distribution de probabilité associée à $(f + \Delta f)$ et à ses dérivées.

Bien entendu, on peut faire un développement en série de p , la formule précédente s'écrira alors :

$$q(x_0) = p(x_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} \mu_{ij} + \dots + \frac{(-1)^m \delta^m p}{m! \partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}} \mu_{i_1 i_2 \dots i_m} + \dots$$

Avec :

$$\mu_{i_1 i_2 \dots i_m} = \int x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m} p'(x) dx$$