

Chapter 5

REMARQUES SUR LE CALCUL DES AMPLITUDES DE LA HOULE LINEAIRE ENGENDREE PAR UN BATTEUR

J. Kravtchenko

Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble

I - INTRODUCTION

On doit à Havelock et à Biéssel une théorie de la génération de la houle plane, mono-périodique, simple de Stokes. Le calcul de l'amplitude de la houle progressive, produite par un batteur, constitue le résultat le plus saillant des auteurs précités. Nous renvoyons le lecteur au mémoire original de Biéssel pour tout ce qui concerne la mise en équations du problème, dont nous ne rappelons ici que l'énoncé définitif.

Dans le plan Oxy , de la variable complexe $z = x + iy$, envisageons un domaine D , défini par les inégalités :

$$0 \leq x \leq \infty ; \quad 0 \leq y \leq h, \quad (1)$$

où h est une constante positive. Il s'agit de construire dans D une fonction harmonique $u(x,y)$, finie et continue à l'infini, finie et continue dans D et sur ses frontières (ainsi que ses dérivées), sauf peut-être, pour $z = 0$ et $z = ih$, assujettie à vérifier les conditions aux limites ci-après :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{pour } 0 \leq x \leq \infty \quad ; \quad y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{k^2 u}{g} \quad \text{pour } 0 \leq x \leq \infty \quad ; \quad y = h \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = k f(y) \quad \text{pour } x = 0 \quad ; \quad 0 \leq y \leq h \quad (4)$$

Dans ces formules, $f(y)$ est une fonction donnée à priori, que pour simplifier, nous supposerons douée de la dérivée troisième $f'''(y)$, finie et continue pour $0 \leq y \leq h$; $k = 2\pi/T$, T étant la période du batteur; enfin g désigne, suivant l'usage, l'accélération de la pesanteur.

Lorsqu'on a la solution explicite du problème aux limites qui précède, on peut discuter toutes les particularités de la propagation de la houle de Stokes, engendrée par un batteur effectuant de faibles oscillations sinusoïdales simples, de période T , autour de la position moyenne, supposée voisine de la verticale Oy . La forme du batteur et son mode d'articulation sont liés simplement à la fonction $f(y)$. Rappelons que pour un batteur piston on prend: $f(y) = e = \text{Cte}$ et pour un volet battant, on a $f(y) = \frac{e}{h} y$. Dans ces formules, e est l'élongation maximale du volet et il va de soi que pour rester dans les cadres de la loi linéaire de Stokes, on supposera $f(y)$, $f'(y)$ et $f''(y)$ petits en valeur absolue sur tout l'intervalle $0 \leq y \leq h$.

Le problème aux limites ainsi posé a été résolu par Havelock (et discuté en détail par Biésel) au moyen des développements en séries.

L'objet de ce mémoire est de compléter sur quelques points les conclusions des auteurs précités.

Tout d'abord, rappelons que $u(x, y)$ présente des singularités aux points $z = 0$ et $z = ih$. A notre connaissance, l'étude du voisinage de $z = ih$ n'a pas encore été faite. En revanche, Biésel a déterminé la singularité de u au point $z = 0$, et ce, à partir du développement de u en série; il en résulte que la discussion exige des calculs parfois laborieux. Il nous a paru à la fois plus simple et plus rigoureux de faire une étude à priori de ces singularités. On a ainsi immédiatement la justification des développements en série et, en même temps, la démonstration de la validité des solutions formelles, obtenues par Havelock et Biésel. De plus, on peut discuter en toute sécurité la portée physique de la théorie due à ces auteurs.

En second lieu, nous étendons les formules résolutive de Biésel au cas d'un volet battant simple dont l'axe est placé au-dessus de la surface libre du liquide et dont l'extrémité inférieure atteint le fond du canal. L'étude de ce dispositif se ramène très simplement à celle de la combinaison d'un volet battant à axe immergé (situé au fond de la section du lit) et d'un batteur piston; pourtant, cette remarque ne semble pas avoir été faite jusqu'ici.

Enfin, nous comblons une lacune de la théorie de Havelock et Biésel et nous démontrons que la suite des fonctions propres, introduites par ces auteurs, est complète; il suffit, pour cela, de s'appuyer sur quelques résultats récents de Lévitanev.

Au total, notre communication ne contient guère de résultats nouveaux pour un technicien. Mais il nous a paru utile d'apporter un peu plus de simplicité et de rigueur à une théorie aussi importante, au point de vue des applications, que celle de la génération de la houle.

II - ETUDE DES SINGULARITES DE $u(x,y)$

Commençons par une démonstration intuitive du fait que $u(x,y)$ présente des singularités en chacun des points $z = 0$ et $z = ih$; la vérification rigoureuse sera présentée ultérieurement.

Si u était régulière à l'origine, les dérivées secondes de u y existeraient au point $x = y = 0$ et on aurait :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \quad (5)$$

Or on a, en calculant les deux membres de (5) à partir de (2) et de (4) respectivement :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{pour } x = y = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = kf'(0) \quad \text{pour } x = y = 0$$

Il s'en suit que si $f'(0) \neq 0$, la condition nécessaire (5) de régularité n'est pas satisfaite.

Un raisonnement analogue montrerait que (5) ne peut être vérifié pour $x = 0$, $y = h$ que si :

$$gf'(h) = k^2 f(h)$$

Bien entendu, le raisonnement précédent n'est rigoureux que moyennant quelques précautions ; il faut préciser les propriétés de continuité des valeurs frontières d'une fonction harmonique pour avoir le droit de calculer les dérivées secondes comme il vient d'être fait. On verra que la justification de ce point est immédiate le long des bords horizontaux de la bande D. Un lecteur soucieux de rigueur trouvera au chapitre III de ma thèse, citée dans la bibliographie, la démonstration du résultat que voici : si $f'''(y)$ existe, est finie, continue pour $0 \leq y \leq h$, la relation (4) peut être dérivée en y une fois pour $0 < y < h$.

REMARQUES SUR LE CALCUL DES AMPLITUDES DE LA HOULE 53
 LINEAIRE ENGENDREE PAR UN BATTEUR

Ehonnçons maintenant quelques propriétés élémentaires de régularité que $u(x,y)$ vérifie sur la frontière de D.

D'après les hypothèses faites, u est finie et continue en chaque point de l'axe réel. D'après (2), la fonction $\partial u / \partial y$, harmonique dans D, est prolongeable analytiquement par symétrie à travers cet axe. On peut donc définir u dans la demi bande D' :

$$-h \leq y \leq h \quad ; \quad 0 \leq x \leq \infty,$$

au moyen de la formule :

$$u(x,y) = u(x, -y) \quad ; \quad 0 \leq x \leq \infty \quad ; \quad 0 \leq y \leq h$$

Ainsi la fonction harmonique u , régulière dans D', est paire en y ; on en déduit :

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial u(x,-y)}{\partial x}$$

Comme par hypothèse, $\partial u / \partial x$ est continue dans D et sur la frontière de ce domaine, sauf, peut-être, à l'origine et au point $z = ih$, on voit que cette fonction, harmonique dans D', vérifie les conditions frontières :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(0,y)}{\partial x} &= kf(y) && \text{pour } 0 \leq y \leq h \\ \frac{\partial u(0,y)}{\partial x} &= kf(-y) && \text{pour } -h \leq y \leq 0. \end{aligned} \tag{6}$$

D'après ce que nous avons vu tout à l'heure, on peut dériver en y ces relations. Il vient donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(0,y)}{\partial x \partial y} &= kf'(y) && \text{pour } 0 \leq y \leq h \\ \frac{\partial^2 u(0,y)}{\partial x \partial y} &= -kf'(-y) && \text{pour } -h \leq y \leq 0 \end{aligned} \tag{6'}$$

Ainsi, la fonction $\partial u / \partial x$, harmonique dans D', est continue le long de l'axe imaginaire ; par contre, la fonction $\partial / \partial y (\partial u / \partial x)$ également harmonique dans D', est continue le long de l'axe imaginaire, origine exceptée et subit en ce point une discontinuité de première espèce, à moins que $f'(0)$ ne soit nul. Le détermination de la singularité que présente alors $u(x,y)$ au point $z = 0$ est alors élémentaire. Voici une manière particulièrement rapide de conclure. Posons :

$$w(z) = u + i v$$

$v(x,y)$ étant la fonction harmonique dans D' , conjuguée de u ; d'après les hypothèses faites sur u , $w(z)$ est holomorphe à l'intérieur de D' . Si on désigne par le symbole R la partie réelle d'une expression complexe, on a :

$$R\left(i \frac{d^2 w}{dz^2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Si alors on introduit la fonction :

$$F(z) = -\frac{2ik}{\pi} f'(0) \log z, \quad (7)$$

où le logarithme est pris avec sa détermination réelle pour z réel et positif, on vérifie immédiatement, eu égard à (6') que la fonction harmonique dans D' :

$$R\left[i \frac{d^2 w}{dz^2} - F(z)\right]$$

est nulle à l'origine et continue (au sens de Lipschitz) le long de l'axe imaginaire dans le voisinage de ce point, puisque $f''(0)$ existe. On peut donc écrire, pour $z = iy$:

$$\left|R\left[i \frac{d^2 w}{dz^2} - F(z)\right]\right| = o(|y|)$$

où $o(|y|)$ désigne, suivant l'usage, une fonction d'ordre $|y|$. Le résultat classique de Fatou (on se rapportera, par exemple, au chapitre III de ma thèse pour l'étude des modules de continuité, à la frontière de leurs domaines de définition, des fonctions analytiques) permet alors de former le développement limité (a_0 étant une constante réelle arbitraire) :

$$i \frac{d^2 w}{dz^2} = F(z) + i a_0 + o(z \log z)$$

d'où l'on tire eu égard à (7) :

$$w(z) = -\frac{k}{\pi} f'(0) z^2 \log z + cz + c_1 + \left[a_0 + \frac{3}{2} \frac{k}{\pi} f'(0)\right] z^2 + o(z^3 \log z)$$

où c et c_1 sont des constantes. On pourrait même préciser la forme du reste $o(z^3 \log z)$; mais cela est sans intérêt pour les applications.

Posons : $z = \rho e^{i\theta}$

$$C = a + bi ; \quad C_1 = a_1 + b_1 i$$

En séparant le réel de l'imaginaire dans la formule précédente, il vient :

$$u(x,y) = -\frac{k}{\pi} f'(0) [(x^2 - y^2) \log \rho - 2xy\theta] + \left[a_0 + \frac{3}{2} \frac{k}{\pi} f'(0) \right] (x^2 - y^2) + ax - by + a_1 + O(\rho^3 \log \rho)$$

On voit donc que :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2kf'}{\pi}(0) \left(x \log \rho - y\theta + \frac{x}{2} \right) + \left[a_0 + 3 \frac{k}{\pi} f'(0) \right] x + a + O(\rho^2 \log \rho)$$

Cela se réduit par $x = 0$ à :

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x} = kf'(0) y + a + O(\rho^2 \log \rho),$$

relation qui n'est compatible avec (6) que si :

$$a = kf(0)$$

De même on trouve :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2k}{\pi} f'(0) \left(y \log \rho + x\theta - \frac{y}{2} \right) - \left[a_0 + 3 \frac{k}{\pi} f'(0) \right] y - b + O(\rho^2 \log \rho)$$

formule qui n'est compatible avec la condition limite (2) que si : $b = 0$.
 En définitive, nous avons pour $u(x,y)$ le développement limité, valable dans le voisinage de $z = 0$:

$$u(x,y) = -\frac{k}{\pi} f'(0) \left[(x^2 - y^2) \log \sqrt{x^2 + y^2} - 2xy \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right] + \left[a_0 + \frac{3}{2} \frac{k}{\pi} f'(0) \right] (x^2 - y^2) + kf(0)x + a_1 + O(\rho^3 \log \rho)$$

où a_1 est une constante arbitraire.

Notre résultat diffère de celui de Biésel en ce qu'il donne la forme du reste du développement limité, dont cet auteur n'avait trouvé que le terme principal.

Rappelons l'interprétation physique de la formule obtenue ; les vitesses du liquide au point $z = 0$ (c'est-à-dire, généralement, à l'articulation

du volet avec son axe) sont finies ; par contre, les accélérations y présentent un infini logarithmique. Nous renverrons, pour la discussion détaillée, à l'article de Biésel.

Passons maintenant à l'étude du voisinage du point $z = ih$. Introduisons la fonction $U(x,y)$, définie par :

$$U = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{k^2}{g} u ; \quad (8)$$

U est harmonique dans D , nulle pour $y = h$, $0 \leq x \leq \infty$ (cf (3)). Les hypothèses de régularité, faites au sujet de u , nous permettent d'effectuer le prolongement analytique de U à travers la demi-droite $y = h$, $0 \leq x \leq \infty$. Faisons, pour plus de commodité, le changement d'axes :

$$X = x ; Y = y - h ; Z = X + iY.$$

Alors $U(X,Y)$ est définie dans la demi-bande D'' :

$$0 \leq X \leq \infty ; -h \leq Y \leq h$$

au moyen de :

$$U(X,Y) = -U(X, -Y) \quad (9)$$

En raisonnant comme pour $z = 0$, on justifie la légitimité des dérivations ci-dessous (Cf.4) :

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{k^2}{g} \frac{\partial u}{\partial x} = kf'(h+Y) - \frac{k^3}{g} f(h+Y) \text{ pour } -h < Y < 0, X = 0 \quad (10)$$

Compte tenu de (9) cela donne :

$$\frac{\partial U}{\partial X} = -kf'(h-Y) + \frac{k^3}{g} f(h-Y) \text{ pour } 0 \leq Y \leq h, X = 0$$

On voit donc que la fonction $U(X,Y)$ présente au point $Z = 0$, une singularité du même type que $u(x,y)$ au point $z = 0$; car la fonction $\frac{\partial U(X,0)}{\partial X}$ subit une discontinuité de lère espèce :

$$2k \left[f'(h) - \frac{k^2}{g} f(h) \right],$$

lorsque le point $Z = iY$ traverse l'origine par valeurs croissantes de Y . Si donc on pose :

$$W(Z) = U(X,Y) + iV(X,Y), \quad (11)$$

où V est la fonction harmonique dans D'' , conjuguée de U , on a le développement limité :

$$W(Z) = \frac{2ki}{\pi} \left[f'(h) - \frac{k^2}{g} f(h) \right] Z \log Z + O \left(\rho_1^2 \log \rho_1 \right) + CZ + C_1 \quad (12)$$

où C désigne une constante imaginaire pure et C_1 une constante complexe et où on a posé $Z = \rho_1 e^{i\theta_1}$. Pour passer de là à la fonction $u_1(X, Y) = u(X, Y + h)$, on introduira la fonction analytique, holomorphe dans D'' :

$$w_1(Z) = u_1 + iv_1$$

On vérifie aisément que :

$$R \left(i \frac{dw_1}{dZ} - \frac{k^2}{g} w_1 \right) = U(X, Y),$$

en sorte que d'après (11) :

$$i \frac{dw_1}{dZ} - \frac{k^2}{g} w_1 = W$$

Il s'en suit que W étant connu, w_1 s'obtient en intégrant l'équation différentielle précédente.

On a donc, C_2 étant une constante :

$$w_1(Z) = C_2 e^{-\frac{k^2 i Z}{g}} - i e^{-\frac{k^2 i Z}{g}} \int W(Z) e^{\frac{k^2 i Z}{g}} dZ$$

Il en résulte en appelant C, C_1 , C_2 des constantes complexes arbitraires, qui peuvent être distinctes de celles qu'on vient d'introduire :

$$w_1(Z) = \frac{k}{\pi} \left[f'(h) - \frac{k^2}{g} f(h) \right] Z^2 \log Z + C + C_1 Z + C_2 Z^2 + O \left(\rho_1^3 \log \rho_1 \right)$$

En posant :

$$C = A + iB ; C_1 = A + iB ; C_2 = A_2 + iB_2$$

on en déduit, en séparant le réel de l'imaginaire :

$$U_1(X, Y) = \frac{k}{\pi} \left[f'(h) - \frac{k^2}{g} f(h) \right] \left[(X^2 - Y^2) \log \rho_1 - 2XY\theta_1 \right] + A_2 (X^2 - Y^2) - 2B_2 XY + A_1 X + A + O \left(\rho_1^3 \log \rho_1 \right)$$

Il reste à fixer le choix des constantes réelles du second membre. A cet effet, écrivons :

$$\frac{\partial u_1}{\partial X} = \frac{k}{\pi} \left[f'(h) - \frac{k^2}{g} f(h) \right] (2X \log \rho_1 - 2Y\theta_1 + X) + 2A_2 X - 2B_2 Y + A_1 + O \left(\rho_1^2 \log \rho_1 \right)$$

Pour $X = 0, Y < 0$, on a : $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$. La formule précédente se réduit à [cf(4)] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(0,Y)}{\partial X} &= k \left[f'(h) - \frac{k^2}{g} f(h) \right] Y - 2B_2 Y + A_1 + O(\rho_1^2 \log \rho_1) \\ &= k f(h+Y) = k f(h) + kY f'(h) + O(\rho_1^2) \end{aligned}$$

Cela exige que :

$$A_1 = k f(h) ; \quad B_2 = -\frac{k^3}{2g} f(h)$$

De même, on trouverait :

$$u(X,0) = A + A_1 X + O(\rho_1^2 \log \rho_1)$$

et :

$$\frac{\partial u(X,0)}{\partial Y} = -2B_2 X + O(\rho_1^2 \log \rho_1)$$

En égard à la définition de $u_1(X,Y) = u(X,Y+h) = u(x,y)$ on voit que (3) ne peut être vérifié que moyennant :

$$A = 0$$

Nous pouvons conclure : le développement limité de $u(x,y)$ dans le voisinage de $z = ih$, s'écrit :

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{k}{\pi} \left[f'(h) - \frac{k^2}{g} f(h) \right] \left[(x^2 - y^2 + 2hy - h^2) \log \sqrt{x^2 + (y-h)^2} - 2x \arctg \frac{y-h}{x} \right] \\ &+ A_2 \left[x^2 - (y-h)^2 \right] + \frac{k^3}{g} f(h) x (y-h) + k f(h) x + O(\rho_1^3 \log \rho_1) \end{aligned}$$

où A_2 est une constante arbitraire.

En définitive, la fonction $u(x,y)$ présente au point $z = ih$, une singularité de même type que $u(x,y)$ pour $z = 0$. Cela achève de justifier les conclusions du travail de Biésel concernant les singularités de la fonction qu'il avait à construire.

III - REMARQUES SUR LE CALCUL DE L'AMPLITUDE DE LA HOULE

Biésel a donné les expressions de l'amplitude a_1 de la houle produite par le batteur piston. Ce dispositif est caractérisé par le choix suivant de la fonction $f(y)$

$$f_1(y) = e ; 0 \leq y \leq h, \quad (13)$$

e étant l'amplitude des élongations du volet, supposé animé d'un mouvement de translation sinusoïdal simple. On a alors :

$$a_1(e) = \frac{2sh^2 mh}{sh mh ch mh + mh} e$$

où m est une constante numérique, solution d'une équation transcendante. De même, pour un volet-battant, articulé au point $z = 0$, on a

$$f_2(y) = \frac{ye}{h} \quad (14)$$

L'amplitude a_1 de la houle correspondante s'écrit :

$$a = 2e \frac{sh mh (1 - ch mh + mh sh mh)}{mh (sh mh ch mh + mh)}$$

Ceci étant, considérons un volet battant, articulé au point $z = ih_1$, $h_1 > h$ et de longueur égale à h_1 .

On voit que le volet prend toute l'épaisseur de la couche liquide lorsqu'il exécute autour de la verticale des oscillations sinusoïdales simples d'amplitude e . Dans ce cas, on doit prendre :

$$f(y) = \frac{h_1 - y}{h_1} e \quad (15)$$

En comparant (13), (14) et (15) on voit que :

$$f(y) = f_1(y) - f_2(y) \quad (16)$$

à condition de prendre égale à $e_1 = \frac{h}{h_1} e$ l'amplitude du batteur volet, articulé au fond.

Reportons nous alors à l'introduction. On voit que toutes les conditions aux limites imposées à $u(x,y)$, sont linéaires et homogènes, à l'exception de (4) ; (16) montre alors que la solution correspondant à $f(y)$ - donnée par (16) - s'obtient par différence entre les solutions correspondantes à $f_1(y)$ et à $f_2(y)$ respectivement. Il est aisé de déduire alors de la formule de Biésel que l'amplitude a de la houle, produite par le batteur $f(y)$ vaut :

$$a(e) = a_1(e) - a_2(e_1)$$

Une discussion numérique facile montrerait que le rendement de ce batteur est faible. Ce résultat est très simple, il ne semble pas avoir été noté jusqu'ici.

IV - ETUDE D'UN PROBLEME DE STURM-LIOUVILLE

Pour résoudre le problème aux limites, énoncé dans l'introduction, Havelock a été amené à discuter le problème Sturm-Liouville, relatif à l'intervalle $0 \leq y \leq h$ et aux solutions de l'équation différentielle :

$$v'' + rv = 0 \quad (17)$$

où r est un paramètre constant, où $v(y,r)$ est la fonction inconnue, avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned} v'(0, z) &= 0 \\ gv'(h,r) - k^2 v(h, r) &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Biésel a calculé la suite des valeurs propres r_n ; la détermination des fonctions propres $v(y, r_n)$ correspondantes est alors élémentaire. Il se trouve que tous les termes de la suite r_n sont positifs, à l'exception de r_1 ; $r_1 < 0$.

La solution formelle de Havelock du problème de l'amplitude n'est évidemment valable que si la suite $v(y, r)$ est complète. La démonstration de la propriété serait classique si tous les r étaient positifs. Aussi bien, Biésel émet-il une réserve quant à la validité de la solution de Havelock. Or, il est aisé de lever toute incertitude à ce sujet, car l'équation (17) avec les conditions aux limites (18) rentre dans le cadre des problèmes étudiés récemment, par exemple, par Lévitanev, au chapitre I, de l'ouvrage cité dans la bibliographie. On peut donc affirmer que la suite $v(y, r_n)$ est bien complète.

Pour achever de justifier la solution de Havelock, il resterait à compléter l'étude du développement qu'il a formé dans le voisinage du segment $x = 0$, $0 \leq y \leq h$. Nous espérons revenir ultérieurement sur ce point.

